

## 第1章 | 平面上のベクトル



## 第1節 ベクトルとその演算

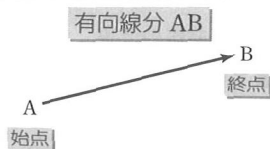
## 1 ベクトル

まとめ

## 1 有向線分

向きをつけた線分を有向線分という。有向線分  $\overrightarrow{AB}$  では、 $A$  をその始点、 $B$  をその終点といい、その向きは  $A$  から  $B$  へ向かっていると

する。  
また、線分  $AB$  の長さを、有向線分  $\overrightarrow{AB}$  の大きさまたは長さという。



## 2 ベクトル

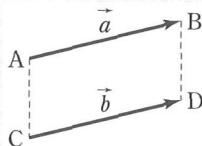
有向線分の位置の違いを無視して、その向きと大きさだけに着目したものをベクトルという。ベクトルは、向きと大きさをもつ量である。

たとえば、力や速度などは、向きと大きさをもつ量であり、ベクトルで表すと考えやすくなる。

**注意** 本章では平面上の有向線分が表すベクトルを考える。これを平面上のベクトルということがある。なお、空間の有向線分が表すベクトルについては、第2章で扱う。

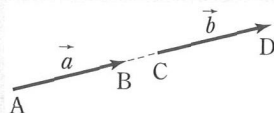
## 3 ベクトルの表し方

有向線分  $\overrightarrow{AB}$  が表すベクトルを  $\overrightarrow{AB}$  で表す。また、ベクトルを  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  などで表すこともある。ベクトル  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{a}$  の大きさは、それぞれ  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\vec{a}|$  で表す。 $|\overrightarrow{AB}|$  は有向線分  $\overrightarrow{AB}$  の長さに等しい。



## 4 ベクトルの相等

向きが同じで大きさも等しい2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  は等しいといい、 $\vec{a} = \vec{b}$  と書く。

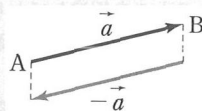


## 5 逆ベクトル

ベクトル  $\vec{a}$  と大きさが等しく、向きが反対のベクトルを、 $\vec{a}$  の逆ベクトルといい、 $-\vec{a}$  で表す。

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  のとき、 $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$  である。

すなわち  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



**A** 有向線分とベクトル

**B** ベクトルの表記

教 p.9

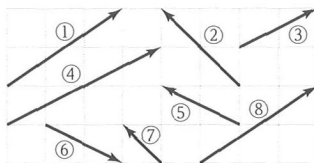
1 章

平面上のベクトル

練習

1

右の図に示されたベクトルについて、次のようなベクトルの番号の組をすべてあげよ。



- (1) 大きさが等しいベクトル
- (2) 向きが同じベクトル
- (3) 等しいベクトル
- (4) 互いに逆ベクトル

**指針** **ベクトルの向き, 相等, 逆ベクトル** ベクトルは, 大きさと向きの2つの要素をもつ量で, この2つが等しいとき, ベクトルは等しい。

また, 大きさが等しく向きが反対のベクトルを逆ベクトルという。

**解答** (1) 大きさが等しいベクトルは,

①と③, ③と⑤と⑥ 答

(2) 向きが同じベクトルは, 線分が平行で, 向きが等しいことから

①と③, ②と⑦, ③と④ 答

(3) ベクトルが等しいのは, 大きさも, 向きも等しいことから

①と③ 答

(4) 逆ベクトルは, 大きさが等しく向きが反対のベクトルであるから

⑤と⑥ 答

## 2 ベクトルの演算

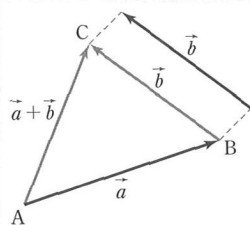
まとめ

### 1 ベクトルの加法

ベクトル  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  とベクトル  $\vec{b}$  に対して,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$  となるように点 C をとる。このようにして定まるベクトル  $\overrightarrow{AC}$  を,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の和といい,  $\vec{a} + \vec{b}$  と書く。

すなわち, 次のことが成り立つ。

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



### 2 ベクトルの加法の性質

ベクトルの加法について, 次の性質が成り立つ。

[1]  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  交換法則

[2]  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  結合法則

## 3 零ベクトル

大きさが0のベクトルを零ベクトル

またはゼロベクトルといい、 $\vec{0}$  で表す。

零ベクトルの向きは考えない。

零ベクトルに関して、次の性質が成り立つ。

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{BB} &= \vec{0} \end{aligned}$$

## 4 ベクトルの差

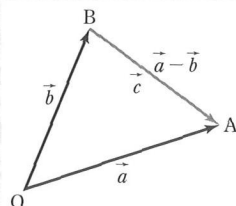
ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  に対して、 $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$  を満たすベクトル  $\vec{c}$  を、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の差といい、 $\vec{a} - \vec{b}$  と書く。

一般に、 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$  であるから

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

同様に、 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$  から

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



## 5 ベクトルの減法の性質

ベクトルの減法について、次の性質が成り立つ。

$$[1] \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad [2] \quad \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$$

## 6 ベクトルの実数倍

実数  $k$  とベクトル  $\vec{a}$  に対して、 $\vec{a}$  の  $k$  倍のベクトル  $k\vec{a}$  を次のように定める。

$\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき

[1]  $k > 0$  ならば、 $\vec{a}$  と向きが同じで、大きさが  $k$  倍のベクトル。

$$\text{とくに} \quad 1\vec{a} = \vec{a}$$

[2]  $k < 0$  ならば、 $\vec{a}$  と向きが反対で、大きさが  $|k|$  倍のベクトル。

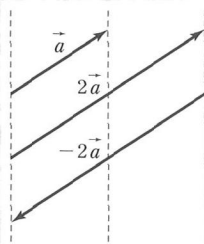
$$\text{とくに} \quad (-1)\vec{a} = -\vec{a}$$

[3]  $k = 0$  ならば、 $\vec{0}$  とする。

$$\text{すなわち} \quad 0\vec{a} = \vec{0}$$

$\vec{a} = \vec{0}$  のとき どんな  $k$  に対しても  $k\vec{0} = \vec{0}$  とする。

**注意**  $(-2)\vec{a} = -(2\vec{a})$  が成り立つので、これらを単に  $-2\vec{a}$  と書く。



## 7 ベクトルの実数倍の性質

$k, l$  は実数とする。

$$[1] \quad k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$$

$$[2] \quad (k+l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

$$[3] \quad k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

## 8 ベクトルの平行

$\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  は、向きが同じか反対のとき、平行であるといい、 $\vec{a} // \vec{b}$  と書く。

9 ベクトルの平行条件  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  のとき

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = k\vec{a} \text{ となる実数 } k \text{ がある}$$

**注意**  $\vec{b} = k\vec{a}$  において、 $k > 0$  のとき  $\vec{a}, \vec{b}$  は同じ向きに平行、 $k < 0$  のとき  $\vec{a}, \vec{b}$  は反対向きに平行である。

### 10 単位ベクトル

大きさが1のベクトルを単位ベクトルという。

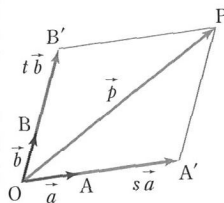
$\vec{a} \neq \vec{0}$  のとき、 $\vec{a}$  と平行な単位ベクトルは  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  と  $-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

### 11 ベクトルの分解

$\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  が平行でないとき、どんなベクトル  $\vec{p}$  も、 $\vec{a}, \vec{b}$  と適当な実数  $s, t$  を用いて  $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$  の形に表すことができる。

しかも、この表し方はただ1通りである。

**注意**  $\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  が平行でないとき、平面上におけるこのような2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  は1次独立であるという。

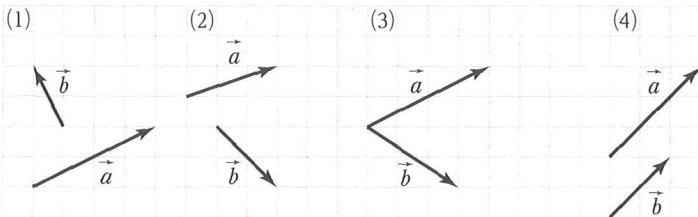


## A ベクトルの加法

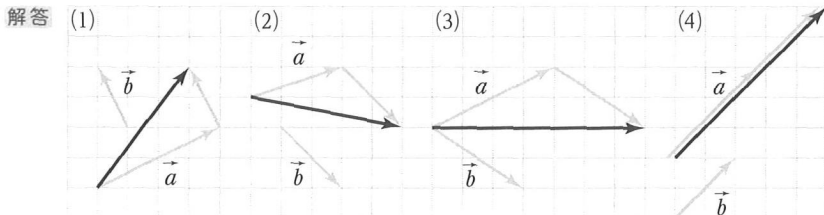
教 p.10

### 練習 2

次のベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  について、 $\vec{a} + \vec{b}$  をそれぞれ図示せよ。



**指針** ベクトルの加法 2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  の和  $\vec{a} + \vec{b}$  は、 $\vec{b}$  を、その始点Pが  $\vec{a}$  の終点Aに一致するように平行移動させ、 $\vec{a}$  の始点Oから  $\vec{b}$  の終点Cへ向かって線分を引くと得られる。





練習  
3

次の等式が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}$$

指針 ベクトルの和 交換法則, 結合法則を利用する。

$$\begin{aligned}\text{解答 } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} \quad \text{終}\end{aligned}$$

## B 零ベクトル

練習  
4

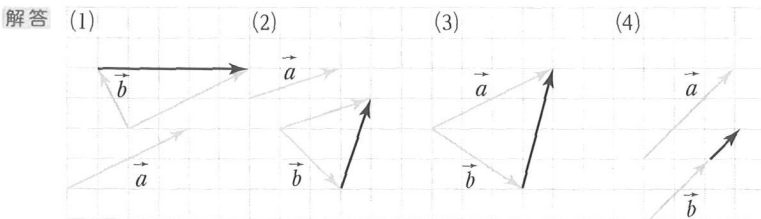
次の等式が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

指針 ベクトルの加法と零ベクトル 結合法則を利用して,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  を先に計算する。 $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$  である。

$$\begin{aligned}\text{解答 } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AA} = \vec{0} \quad \text{終}\end{aligned}$$

## C ベクトルの減法

練習  
5練習2のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について,  $\vec{a} - \vec{b}$  をそれぞれ図示せよ。指針 ベクトルの差 1つの点を始点として,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  をかき,  $\vec{b}$  の終点を始点とし,  $\vec{a}$  の終点を終点とするベクトルをかく。

## D ベクトルの実数倍

練習  
6教科書の例3のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  について, 次の( )に適する実数を求めよ。

$$(1) \vec{b} = ( ) \vec{a} \quad (2) \vec{a} = ( ) \vec{c} \quad (3) \vec{b} = ( ) \vec{c}$$

指針 ベクトルの実数倍 向きが反対のとき、負の実数倍となる。

解答 (1)  $\vec{b}$  は  $\vec{a}$  と向きが同じで、大きさが  $\frac{1}{4}$  倍であるから

$$\vec{b} = \frac{1}{4} \vec{a} \quad \text{答} \quad \frac{1}{4}$$

(2)  $\vec{a}$  は  $\vec{c}$  と向きが反対で、大きさが 2 倍であるから

$$\vec{a} = -2\vec{c} \quad \text{答} \quad -2$$

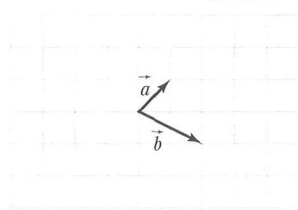
(3)  $\vec{b}$  は  $\vec{c}$  と向きが反対で、大きさが  $\frac{1}{2}$  倍であるから

$$\vec{b} = -\frac{1}{2} \vec{c} \quad \text{答} \quad -\frac{1}{2}$$

### 練習 7

右の図のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について、次のベクトルを図示せよ。

- (1)  $2\vec{a}$                       (2)  $-2\vec{b}$   
 (3)  $2\vec{a} + \vec{b}$                 (4)  $\vec{a} - 2\vec{b}$



教 p.13

指針 ベクトルの図示 まず、 $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  をそれぞれ実数倍したベクトルを作図する。

(3), (4) ベクトルの加法, 減法の定義から向きを決定し, 求めるベクトルを作図する。

解答 図のように,  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  とする。

(1) 線分 OA の延長上に

OC = 2OA となる点 C をとると

$$2\vec{a} = \overrightarrow{OC}$$

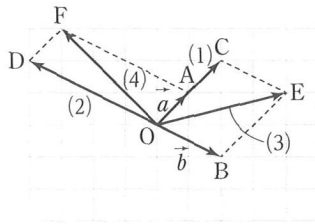
(2) 線分 BO の延長上に

OD = 2OB となる点 D をとると

$$-2\vec{b} = \overrightarrow{OD}$$

(3)  $2\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$

(4)  $\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{a} + (-2\vec{b}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF}$



### E ベクトルの計算

### 練習 8

次の計算をせよ。

- (1)  $\vec{a} + 3\vec{a} - 2\vec{a}$                       (2)  $2(\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{b})$

教 p.14

指針 ベクトルの計算  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  などの式を文字式と同じように扱うことができる。

- (1) 同類項をまとめる。  
 (2) 分配法則により、かっこをはずし、同類項をまとめる。

解答 (1)  $\vec{a} + 3\vec{a} - 2\vec{a} = (1+3-2)\vec{a} = 2\vec{a}$  答  
 (2)  $2(\vec{a} - 3\vec{b}) - 3(3\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} - 9\vec{a} + 6\vec{b}$   
 $= (2-9)\vec{a} + (-6+6)\vec{b}$   
 $= -7\vec{a}$  答

## F ベクトルの平行

教 p.15

練習  
9

次の問いに答えよ。

- (1) 単位ベクトル  $\vec{e}$  と平行で、大きさが4のベクトルを  $\vec{e}$  を用いて表せ。  
 (2)  $|\vec{a}|=3$  のとき、 $\vec{a}$  と同じ向きに単位ベクトルを  $\vec{a}$  を用いて表せ。

指針 平行なベクトルと単位ベクトル

- (1)  $\vec{e}$  と平行なベクトルは  $k\vec{e}$  である。  
 (2)  $\vec{a}$  と同じ向きに単位ベクトル、すなわち、 $\vec{a}$  と同じ向きに大きさが1のベクトルは  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$  である。

解答 (1)  $4\vec{e}, -4\vec{e}$  答  
 (2)  $\frac{1}{3}\vec{a}$   $\left(\frac{\vec{a}}{3}\right)$  答

## G ベクトルの分解

教 p.16

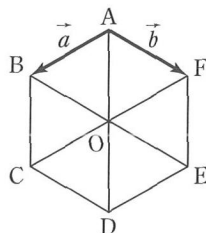
練習  
10教科書の例題1において、次のベクトルを  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いて表せ。

- (1)  $\overrightarrow{AC}$  (2)  $\overrightarrow{EF}$  (3)  $\overrightarrow{DB}$

指針 ベクトルの分解

 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$  のように分解することができる。

解答 (1)  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}$   
 $= \vec{b} + 2\vec{a}$   
 $= 2\vec{a} + \vec{b}$  答  
 (2)  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF}$   
 $= -\vec{b} + (-\vec{a})$   
 $= -\vec{a} - \vec{b}$  答



$$\begin{aligned}
 (3) \quad \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} \\
 &= -\overrightarrow{a} + (-2\overrightarrow{b}) \\
 &= -\overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

### 3 ベクトルの成分

まとめ

#### 1 基本ベクトル

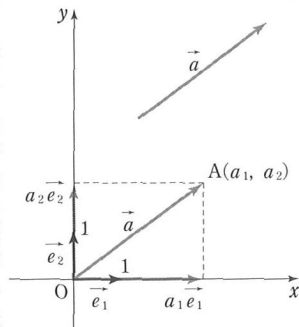
O を原点とする座標平面上で、 $x$  軸、 $y$  軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを、基本ベクトルといい、それぞれ  $\overrightarrow{e_1}$ ,  $\overrightarrow{e_2}$  で表す。

#### 2 ベクトルの成分

座標平面上のベクトル  $\overrightarrow{a}$  に対し、 $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$  である点 A の座標が  $(a_1, a_2)$  のとき、 $\overrightarrow{a}$  は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{a} &= a_1 \overrightarrow{e_1} + a_2 \overrightarrow{e_2} \\
 \overrightarrow{a} &= (a_1, a_2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

①における  $a_1, a_2$  を、それぞれ  $\overrightarrow{a}$  の  $x$  成分、 $y$  成分といい、まとめて  $\overrightarrow{a}$  の成分という。また、①を  $\overrightarrow{a}$  の成分表示という。



#### 3 ベクトルの相等

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{a} &= (a_1, a_2), \overrightarrow{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき} \\
 \overrightarrow{a} &= \overrightarrow{b} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2
 \end{aligned}$$

#### 4 ベクトルの大きさ

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{a} &= (a_1, a_2) \text{ のとき} \\
 |\overrightarrow{a}| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2}
 \end{aligned}$$

#### 5 和, 差, 実数倍の成分表示

$$\begin{aligned}
 (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\
 (a_1, a_2) - (b_1, b_2) &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2) \\
 k(a_1, a_2) &= (ka_1, ka_2) \quad \text{ただし, } k \text{ は実数}
 \end{aligned}$$

#### 6 2点 A, B とベクトル $\overrightarrow{AB}$

2点  $A(a_1, a_2)$ ,  $B(b_1, b_2)$  について

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} &= (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \\
 |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}
 \end{aligned}$$

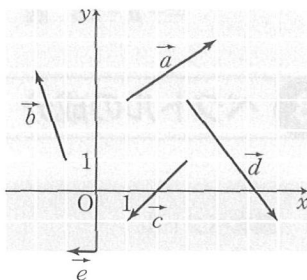
## A ベクトルの成分表示

教 p.18

## 練習

11

右の図のベクトル  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ ,  $\vec{e}$  を、それぞれ成分表示せよ。また、各ベクトルの大きさを求めよ。



指針 ベクトルの成分と大きさ 有向線分が表す各ベクトルの始点、終点の座標をもとに求める。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 } \vec{b} &= (-1, 3), & |\vec{b}| &= \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} & \text{ 答} \\
 \vec{c} &= (2, -2), & |\vec{c}| &= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} & \text{ 答} \\
 \vec{d} &= (3, -4), & |\vec{d}| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 & \text{ 答} \\
 \vec{e} &= (-1, 0), & |\vec{e}| &= \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 & \text{ 答}
 \end{aligned}$$

## B 和, 差, 実数倍の成分表示

教 p.19

## 練習

12

$\vec{a} = (3, -1)$ ,  $\vec{b} = (-4, 2)$  のとき、次のベクトルを成分表示せよ。

- |                           |                             |
|---------------------------|-----------------------------|
| (1) $\vec{a} + \vec{b}$   | (2) $4\vec{a}$              |
| (3) $4\vec{a} - 3\vec{b}$ | (4) $-2(\vec{a} - \vec{b})$ |

指針 和, 差, 実数倍の成分表示 (1)は和。 $x$ 成分どうし,  $y$ 成分どうしの和が, それぞれ  $x$ 成分,  $y$ 成分となる。(2)は実数倍。 $x$ 成分,  $y$ 成分とも実数倍する。(3)は差も加わる。差は,  $x$ 成分どうし,  $y$ 成分どうしの差が, それぞれ  $x$ 成分,  $y$ 成分となる。(4)は差の実数倍。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 (1)} \quad \vec{a} + \vec{b} &= (3, -1) + (-4, 2) \\
 &= (3 + (-4), -1 + 2) = (-1, 1) \quad \text{ 答} \\
 (2) \quad 4\vec{a} &= 4(3, -1) = (12, -4) \quad \text{ 答} \\
 (3) \quad 4\vec{a} - 3\vec{b} &= 4(3, -1) - 3(-4, 2) \\
 &= (12, -4) - (-12, 6) \\
 &= (12 + 12, -4 - 6) = (24, -10) \quad \text{ 答} \\
 (4) \quad -2(\vec{a} - \vec{b}) &= -2\vec{a} + 2\vec{b} = -2(3, -1) + 2(-4, 2) \\
 &= (-6, 2) + (-8, 4) = (-6 - 8, 2 + 4) = (-14, 6) \quad \text{ 答}
 \end{aligned}$$

練習  
13

$\vec{a}=(2, 1)$ ,  $\vec{b}=(-1, 3)$  とする。 $\vec{c}=(8, -3)$  を、適当な実数  $s, t$  を用いて  $s\vec{a}+t\vec{b}$  の形に表せ。

指針 ベクトルの分解 ベクトル  $s\vec{a}+t\vec{b}$  を成分表示し、 $\vec{c}$  の成分と比べて、 $s, t$  の値を求める。

解答  $s\vec{a}+t\vec{b}=s(2, 1)+t(-1, 3)$   
 $= (2s-t, s+3t)$   
 であるから、 $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$  とすると  
 $(8, -3)=(2s-t, s+3t)$   
 よって  $2s-t=8, \quad s+3t=-3$   
 これを解くと  $s=3, t=-2$   
 したがって  $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$  答

## 1 章

## 平面上のベクトル

練習  
14

次の2つのベクトルが平行になるように、 $x$  の値を定めよ。

(1)  $\vec{a}=(-2, 1)$ ,  $\vec{b}=(x, -3)$  (2)  $\vec{a}=(2, x)$ ,  $\vec{b}=(3, 6)$

指針 ベクトルの平行  $\vec{a} // \vec{b}$  であるとき、 $\vec{b}=k\vec{a}$  となる実数  $k$  がある。 $\vec{a}, k\vec{b}$  の成分表示から実数  $k$  の値を求め、続いて  $x$  の値を求める。

解答 (1)  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  であるから、 $\vec{a} // \vec{b}$  になるのは、 $\vec{b}=k\vec{a}$  となる実数  $k$  が存在するときである。

$$(x, -3)=(-2k, k) \text{ から } x=-2k, \quad -3=k$$

$$\text{よって } k=-3$$

$$\text{したがって } x=-2 \times (-3)=6 \quad \text{答 } x=6$$

(2)  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  であるから、 $\vec{a} // \vec{b}$  になるのは、 $\vec{a}=k\vec{b}$  となる実数  $k$  が存在するときである。

$$(2, x)=(3k, 6k) \text{ から } 2=3k, \quad x=6k$$

$$\text{よって } k=\frac{2}{3}$$

$$\text{したがって } x=6 \times \frac{2}{3}=4 \quad \text{答 } x=4$$

## C 座標平面上の点とベクトル

練習  
15

次の2点 A, B について、 $\overrightarrow{AB}$  を成分表示し、 $|\overrightarrow{AB}|$  を求めよ。

(1) A(5, 2), B(1, 6) (2) A(-3, 4), B(2, 0)

指針 座標平面上の点とベクトル  $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)$  のとき

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2), \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

解答 (1)  $\overrightarrow{AB} = (1 - 5, 6 - 2) = (-4, 4)$  答

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$
 答

(2)  $\overrightarrow{AB} = (2 - (-3), 0 - 4) = (5, -4)$  答

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41}$$
 答

練習  
16

4 点  $A(-2, 1), B(x, y), C(2, 4), D(-1, 3)$  を頂点とする四角形  $ABCD$  が平行四辺形になるように,  $x, y$  の値を定めよ。

教 p.20

指針 平行四辺形とベクトル 平行四辺形  $ABCD$  では,  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  が成り立つ。

解答 四角形  $ABCD$  が平行四辺形になるのは,  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$  のときであるから

$$\begin{aligned} (2 - x, 4 - y) &= (-1 - (-2), 3 - 1) \\ &= (1, 2) \end{aligned}$$

よって  $2 - x = 1, 4 - y = 2$

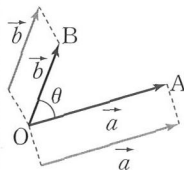
したがって  $x = 1, y = 2$  答

## 4 ベクトルの内積

まとめ

### 1 2つのベクトルのなす角

$\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  について, 1点  $O$  を定め,  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$  となる点  $A, B$  をとる。このようにして定まる  $\angle AOB$  の大きさ  $\theta$  を,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角という。ただし,  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  である。



### 2 ベクトルの内積

$\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とするとき,

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$  を  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積といい,  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  で表す。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \quad \text{ただし, } \theta \text{ は } \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ のなす角}$$

$\vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{b} = \vec{0}$  のときは,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積を  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  と定める。

**注意** 2つのベクトルの内積は, ベクトルではなく実数である。

### 3 ベクトルの垂直・平行

$\vec{0}$  でない2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とする。

$\theta = 90^\circ$  のとき,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は垂直であるといい,  $\vec{a} \perp \vec{b}$  と書く。

$\theta = 0^\circ$  のとき  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は同じ向きに平行,

$\theta = 180^\circ$  のとき  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は反対向きに平行である。

## 4 ベクトルの垂直・平行と内積

 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  のとき

[1]  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

[2]  $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$  または  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$

## 5 内積と成分

 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$  のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

**注意** 上のことは、 $\vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{b} = \vec{0}$  のときも成り立つ。

## 6 ベクトルのなす角の余弦

 $\vec{0}$  でない 2 つのベクトル  $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$  のなす角を  $\theta$  とする。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  である。このとき

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

## 7 ベクトルの垂直条件

 $\vec{0}$  でない 2 つのベクトル  $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$  について

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

## 8 内積の性質

[1]  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

[2]  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

[3]  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

[4]  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

[5]  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$  ただし、 $k$  は実数

**注意** [1] から、 $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0, |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$  が成り立つ。

## A ベクトルの内積

教 p.21

練習  
17 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とする。次の場合に内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。

(1)  $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \theta = 45^\circ$  (2)  $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 6, \theta = 150^\circ$

**指針** ベクトルの内積  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積は、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$  により求める。**解答** (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ$ 

$$= 4 \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2} \quad \text{答}$$

(2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 150^\circ$

$$= 6 \times 6 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -18\sqrt{3} \quad \text{答}$$



練習  
18

教科書の例 10 の直角三角形 ABC において、次の内積を求めよ。

(1)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

(2)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$

## 指針 図形と内積

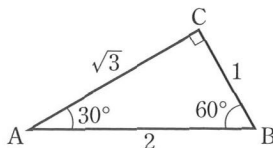
(1)  $\overrightarrow{BA}$  と  $\overrightarrow{AC}$  のなす角は  $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$  である。(2)  $\overrightarrow{AC}$  と  $\overrightarrow{BC}$  のなす角は  $90^\circ$  である。解答 (1)  $|\overrightarrow{BA}|=2$ ,  $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ ,  $\overrightarrow{BA}$  と  $\overrightarrow{AC}$  のなす角  $\theta$  は  $150^\circ$  であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{AC}| \cos \theta \\ &= 2 \times \sqrt{3} \times \cos 150^\circ \\ &= 2 \times \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= -3 \quad \text{答}$$

(2)  $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ ,  $|\overrightarrow{BC}|=1$ ,  $\overrightarrow{AC}$  と  $\overrightarrow{BC}$  のなす角  $\theta$  は  $90^\circ$  であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{BC}| \cos \theta \\ &= \sqrt{3} \times 1 \times \cos 90^\circ \\ &= \sqrt{3} \times 1 \times 0 = 0 \quad \text{答}\end{aligned}$$



## B 成分による内積の表示

練習  
19次のベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について、内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  を求めよ。

(1)  $\vec{a} = (2, 5)$ ,  $\vec{b} = (3, -2)$

(2)  $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ,  $\vec{b} = (\sqrt{3}, -1)$

指針 内積と成分  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  のとき、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  の内積は、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$  により求める。解答 (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 3 + 5 \times (-2) = -4$  答

(2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times (-1) = 0$  答

## C ベクトルのなす角

練習  
20次の 2 つのベクトルのなす角  $\theta$  を求めよ。

(1)  $\vec{a} = (2, 1)$ ,  $\vec{b} = (-3, 1)$

(2)  $\vec{a} = (1, \sqrt{3})$ ,  $\vec{b} = (\sqrt{3}, 1)$

(3)  $\vec{a} = (3, -1)$ ,  $\vec{b} = (2, 6)$

(4)  $\vec{a} = (-4, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, -1)$

指針 ベクトルのなす角  $\vec{a}=(a_1, a_2)$ ,  $\vec{b}=(b_1, b_2)$  のとき, なす角  $\theta$  は

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \text{ により求める。}$$

解答 (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-3) + 1 \times 1 = -5$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 135^\circ \quad \text{答}$$

(2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1 = 2\sqrt{3}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 30^\circ \quad \text{答}$$

(3)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 0$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{0}{\sqrt{10} \times 2\sqrt{10}} = 0$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 90^\circ \quad \text{答}$$

(4)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4 \times 2 + 2 \times (-1) = -10$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-10}{2\sqrt{5} \sqrt{5}} = -1$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 180^\circ \quad \text{答}$$

### 練習 21

教 p.25

次の2つのベクトルが垂直になるように,  $x$  の値を定めよ。

(1)  $\vec{a} = (3, 6)$ ,  $\vec{b} = (x, 4)$       (2)  $\vec{a} = (x, -1)$ ,  $\vec{b} = (x, x+2)$

指針 垂直なベクトル ベクトルの垂直条件  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  を用いる。

解答 (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  より  $3x + 6 \times 4 = 0$

$$\text{よって } x = -8 \quad \text{答}$$

(2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  より  $x \times x + (-1) \times (x+2) = 0$       ゆえに  $x^2 - x - 2 = 0$

$$\text{左辺を因数分解して } (x+1)(x-2) = 0$$

$$\text{よって } x = -1, 2 \quad \text{答}$$

練習  
22

次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{a} = (2, 1)$  に垂直で大きさが  $\sqrt{10}$  のベクトル  $\vec{b}$  を求めよ。  
 (2)  $\vec{a} = (4, 3)$  に垂直な単位ベクトル  $\vec{e}$  を求めよ。

## 指針 垂直なベクトル

- (1)  $\vec{b} = (x, y)$  とすると  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  から  $2x + y = 0$   
 また、 $|\vec{b}|^2 = (\sqrt{10})^2$  から  $x^2 + y^2 = 10$   
 この  $x, y$  の連立方程式を解く。  
 (2) (1)と同様に  $\vec{e} = (x, y)$  として、 $x, y$  の連立方程式を作ってそれを解く。  
 $\vec{e}$  は単位ベクトルであるから  $|\vec{e}|^2 = x^2 + y^2 = 1$

解答 (1)  $\vec{b} = (x, y)$  とする。

$$\vec{a} \perp \vec{b} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{すなわち} \quad 2x + y = 0$$

$$\text{よって} \quad y = -2x \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$|\vec{b}|^2 = (\sqrt{10})^2 \text{ であるから } x^2 + y^2 = 10 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①を②に代入すると} \quad x^2 + (-2x)^2 = 10$$

$$\text{整理すると} \quad 5x^2 = 10 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

①に代入して

$$x = \sqrt{2} \text{ のとき } y = -2\sqrt{2}, \quad x = -\sqrt{2} \text{ のとき } y = 2\sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad \vec{b} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \quad \square$$

(2)  $\vec{e} = (x, y)$  とする。

$$\vec{a} \perp \vec{e} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \quad \text{すなわち} \quad 4x + 3y = 0$$

$$\text{よって} \quad y = -\frac{4}{3}x \quad \cdots \cdots \text{①}$$

$$|\vec{e}|^2 = 1^2 \text{ であるから } x^2 + y^2 = 1 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

$$\text{①を②に代入すると} \quad x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 1$$

$$\text{整理すると} \quad \frac{25}{9}x^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm\frac{3}{5}$$

①に代入して

$$x = \frac{3}{5} \text{ のとき } y = -\frac{4}{5}, \quad x = -\frac{3}{5} \text{ のとき } y = \frac{4}{5}$$

$$\text{よって} \quad \vec{e} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \quad \square$$

練習  
23

次の問いに答えよ。

- (1)  $\vec{0}$  でないベクトル  $\vec{a}=(a_1, a_2)$  と  $\vec{b}=(a_2, -a_1)$  は垂直であることを示せ。
- (2) (1)を用いて,  $\vec{a}=(1, 2)$  に垂直な単位ベクトル  $\vec{e}$  を求めよ。

指針 垂直であることの証明, 垂直な単位ベクトル

- (1)  $\vec{0}$  でないベクトル  $\vec{a}=(a_1, a_2)$  と  $\vec{b}=(a_2, -a_1)$  が垂直であることを示すには,  $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$  と  $\vec{b} \neq \vec{0}$  を示せばよい。

- (2) (1)より,  $\vec{a}$  に垂直な単位ベクトルは  $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$  と  $-\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

解答 (1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 a_2 + a_2(-a_1) = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0$  $\vec{a} \neq \vec{0}$  であるから  $a_1 \neq 0$  または  $a_2 \neq 0$ よって  $\vec{b} \neq \vec{0}$ したがって, ベクトル  $\vec{a}=(a_1, a_2)$  と  $\vec{b}=(a_2, -a_1)$  は垂直である。 [終]

- (2) (1)から,  $\vec{a}=(1, 2)$  と  $\vec{b}=(2, -1)$  は垂直である。

 $|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$  であるから,  $\vec{b}$  に平行な単位ベクトル  $\vec{e}$  は

$$\vec{e} = \pm \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \pm \frac{\vec{b}}{\sqrt{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \vec{b} \quad (\text{複号同順})$$

$$\text{よって} \quad \frac{\sqrt{5}}{5} \vec{b} = \frac{\sqrt{5}}{5} (2, -1) = \left( \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right),$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{5} \vec{b} = -\frac{\sqrt{5}}{5} (2, -1) = \left( -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$$

$$\text{したがって} \quad \vec{e} = \left( \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right), \left( -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \quad \text{答}$$

## D 内積の性質

練習  
24

次の等式を証明せよ。

$$(1) |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$

$$(2) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

指針 ベクトルの大きさと内積

- (1)  $|\vec{a} + 2\vec{b}|$  はベクトル  $\vec{a} + 2\vec{b}$  の大きさを表す実数であるから, このままでは内積の計算法則を利用することはできない。まず,  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$  であることを用いて,  $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2$  を内積の形に表す。

$$\begin{aligned} \text{解答 (1) 左辺} &= (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) \end{aligned}$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 4\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\leftarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = \text{右辺}$$

$$\text{よって } |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \quad \text{終}$$

$$(2) \text{ 左辺} = \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$\leftarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = \text{右辺}$$

$$\text{よって } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \quad \text{終}$$

練習  
25

$|\vec{a}|=3$ ,  $|\vec{b}|=2$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b}=-3$  のとき, 次の値を求めよ。

$$(1) |\vec{a} + \vec{b}|$$

$$(2) |\vec{a} - 2\vec{b}|$$

教 p.27

指針 ベクトルの大きさと内積

(1)  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  から, まず  $|\vec{a} + \vec{b}|^2$  の値を求める。

$$\begin{aligned} \text{解答 (1)} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 3^2 + 2 \times (-3) + 2^2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7} \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 &= (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 3^2 - 4 \times (-3) + 4 \times 2^2 \\ &= 37 \end{aligned}$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}| \geq 0 \text{ であるから } |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{37} \quad \text{答}$$

練習  
26

$|\vec{a}|=2$ ,  $|\vec{b}|=2$  で,  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  と  $\vec{a} + 4\vec{b}$  が垂直であるとする。

このとき,  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角  $\theta$  を求めよ。

教 p.27

指針 ベクトルのなす角と内積  $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \perp (\vec{a} + 4\vec{b})$  から

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 4\vec{b}) = 0 \quad |\vec{a}|, |\vec{b}| \text{ の値から } \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ の値を求め,}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \text{ より, } \theta \text{ を求める。}$$

$$\text{解答 } (3\vec{a} - 2\vec{b}) \perp (\vec{a} + 4\vec{b}) \text{ であるから } (3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 4\vec{b}) = 0$$

$$\text{よって } 3|\vec{a}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = 0$$

$$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=2 \text{ を代入すると } 3 \times 2^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 \times 2^2 = 0$$

$$\text{ゆえに } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \text{ よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  であるから  $\theta = 60^\circ$  答

## 研究 三角形の面積

まとめ

### 三角形の面積

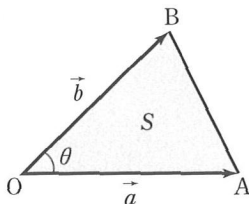
$\triangle OAB$  において,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とする。

このとき,  $\triangle OAB$  の面積  $S$  を, ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表すと

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

また,  $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2)$

とすると  $S = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$



### 練習 1

次の 3 点を頂点とする三角形の面積を求めよ。

$O(0, 0)$ ,  $A(4, 1)$ ,  $B(2, -1)$

教 p.28

指針 三角形の面積  $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = (b_1, b_2)$  とすると,

$$\triangle OAB \text{ の面積 } S \text{ は } S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

解答  $\overrightarrow{OA} = (4, 1)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (2, -1)$  であるから

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = 4^2 + 1^2 = 17, \quad |\overrightarrow{OB}|^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 4 \times 2 + 1 \times (-1) = 7$$

よって, 求める三角形の面積  $S$  は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{17 \times 5 - 7^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{36} = 3 \quad \text{答}$$

別解  $\overrightarrow{OA} = (4, 1)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (2, -1)$  であるから

$$S = \frac{1}{2} |4 \times (-1) - 1 \times 2| = \frac{1}{2} |-6| = 3 \quad \text{答}$$

## コラム ベクトルの内積

教 p.29

## 練習

教科書のコラムのように平らな地面で物体を移動させたとき、重力が物体にした仕事を内積を利用して求めてみよう。

指針 重力は物体の移動の向きと垂直である。

解答 物体の移動を表すベクトルを  $\vec{x}$ ，重力を表すベクトルを  $\vec{F}$  とすると，  
 $\vec{F} \perp \vec{x}$  であるから  $\vec{F} \cdot \vec{x} = 0$

したがって、重力が物体にした仕事は 0 である。 答

## 第1章 第1節

## 問題

教 p.30

1章

平面上のベクトル

1 次の等式を満たす  $\vec{x}$  を,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。

(1)  $3\vec{x} - 4\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{b}$

(2)  $2(\vec{x} - 3\vec{a}) = 5(\vec{x} + 2\vec{b})$

指針 **ベクトルの計算** ベクトルの加法, 減法, 実数倍の計算では,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  などを, 数を表す文字と同じように扱うことができる。

$\vec{x}$  についての方程式を解くと考えてよい。

解答 (1) 移項すると

$$3\vec{x} - \vec{x} = -2\vec{b} + 4\vec{a}$$

整理して

$$2\vec{x} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

両辺を2で割って

$$\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b} \quad \text{答}$$

(2) かっこをはずすと  $2\vec{x} - 6\vec{a} = 5\vec{x} + 10\vec{b}$

移項すると

$$2\vec{x} - 5\vec{x} = 10\vec{b} + 6\vec{a}$$

整理して

$$-3\vec{x} = 6\vec{a} + 10\vec{b}$$

両辺を-3で割って

$$\vec{x} = -2\vec{a} - \frac{10}{3}\vec{b} \quad \text{答}$$

教 p.30

2 右の図の正六角形 ABCDEF において,  $AB=2$ 

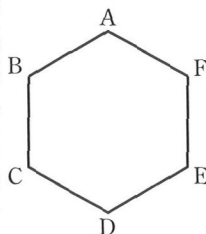
とする。次の内積を求めよ。

(1)  $\vec{AB} \cdot \vec{AF}$

(2)  $\vec{AD} \cdot \vec{CE}$

(3)  $\vec{AC} \cdot \vec{AE}$

(4)  $\vec{AC} \cdot \vec{CE}$



指針 **図形と内積** 正六角形 ABCDEF であるから, 中心 O と各頂点を結んでできる 6 個の三角形は, すべて 1 辺の長さが 2 の正三角形である。

解答 正六角形 ABCDEF の中心を O とする。

(1)  $\angle BAF = 120^\circ$  であるから

$$\vec{AB} \cdot \vec{AF} = |\vec{AB}| |\vec{AF}| \cos 120^\circ$$

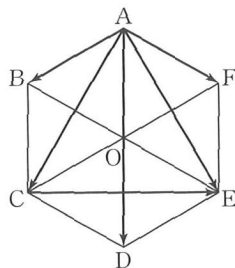
$$= 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \quad \text{答}$$

(2) 正六角形であるから  $\vec{AD} \perp \vec{CE}$

よって  $\vec{AD} \cdot \vec{CE} = 0 \quad \text{答}$

(3) 1 辺の長さが 2 の正六角形であるから

$$AC = AE = 2\sqrt{3}$$





$$\begin{aligned}
 &\text{また} \quad \angle CAE = 60^\circ \\
 &\text{よって} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AE}| \cos 60^\circ \\
 &\quad = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 6 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad &(3) \text{と同様に} \quad AC = CE = 2\sqrt{3} \\
 &\text{また, } \overrightarrow{AC} \text{ と } \overrightarrow{CE} \text{ のなす角は } 120^\circ \text{ であるから} \\
 &\quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{CE}| \cos 120^\circ \\
 &\quad = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6 \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

3 次の問いに答えよ。

(1) 次が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned}
 &\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \text{ で, } \vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2) \text{ のとき} \\
 &\quad \vec{a} // \vec{b} \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0
 \end{aligned}$$

(2) 2つのベクトル  $\vec{a} = (9, -6)$ ,  $\vec{b} = (x, 2)$  について,  $\vec{a} // \vec{b}$  のとき,  
(1)の結果を用いて,  $x$  の値を求めよ。

指針 ベクトルの平行条件

(1)  $\vec{a} = k\vec{b}$  となる0でない実数  $k$  が存在することからも示せるが, 場合分けが面倒である。ここでは内積を利用して示す。

0でない2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) とすると  
 $\vec{a} // \vec{b} \iff \theta = 0^\circ \text{ または } \theta = 180^\circ$  これを成分で表す。

(2)  $a_1 = 9$ ,  $a_2 = -6$ ,  $b_1 = x$ ,  $b_2 = 2$  を  $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$  に代入して求める。

解答 (1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  とすると,  $\vec{a} // \vec{b}$  のとき  
 $\theta = 0^\circ$  または  $\theta = 180^\circ$

このとき,  $\cos 0^\circ = 1$ ,  $\cos 180^\circ = -1$  から

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \quad \text{または} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\text{すなわち} \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\text{両辺を2乗して} \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$$\text{両辺を成分で表すと} \quad (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

$$\text{整理すると} \quad a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = 0$$

$$\text{よって} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

逆に, このとき  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$  となり,  $\vec{a} // \vec{b}$  が成り立つ。 終

$$(2) \quad (1) \text{より} \quad 9 \times 2 - (-6) \times x = 0$$

$$\text{すなわち} \quad 18 + 6x = 0$$

$$\text{よって} \quad x = -3 \quad \text{答}$$

4  $|\vec{a}|=1$ ,  $|\vec{b}|=\sqrt{3}$ ,  $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$  のとき, 次の問いに答えよ。

(1)  $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  のなす角  $\theta$  を求めよ。

(2)  $\vec{a}+t\vec{b}$  と  $\vec{a}-\vec{b}$  が垂直になるように, 実数  $t$  の値を定めよ。

指針 ベクトルとなす角 (1) まず,  $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$  を利用して内積  $\vec{a}\cdot\vec{b}$  を求める。次に  $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$  により, なす角  $\theta$  を求める。

(2) ベクトルの垂直条件  $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2=0$  を利用する。

解答 (1)  $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$  の両辺を 2 乗して

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=7 \quad \text{すなわち} \quad |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$$

$|\vec{a}|=1$ ,  $|\vec{b}|=\sqrt{3}$  を代入して

$$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=7$$

$$\text{よって} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$$

$$\text{したがって} \quad \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-\frac{3}{2}}{1\times\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ$  であるから  $\theta=150^\circ$  〇

(2)  $(\vec{a}+t\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$  であるから  $(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$$\text{よって} \quad |\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$$

ここで,  $|\vec{a}|=1$ ,  $|\vec{b}|=\sqrt{3}$ ,  $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}$  であるから

$$1^2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}t-t\times(\sqrt{3})^2=0$$

$$\text{よって} \quad -\frac{9}{2}t+\frac{5}{2}=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{5}{9}$$

このとき,  $\vec{a}+t\vec{b}\neq\vec{0}$ ,  $\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$  である。 〇  $t=\frac{5}{9}$

## 研究

5 次の三角形の面積  $S$  を求めよ。

(1)  $|\vec{OA}|=4$ ,  $|\vec{OB}|=5$ ,  $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=-10$  を満たす  $\triangle OAB$

(2) 3 点  $A(1, 0)$ ,  $B(-2, -1)$ ,  $C(-1, 3)$  を頂点とする  $\triangle ABC$

指針 三角形の面積  $\triangle OAB$  の面積は,  $\vec{OA}=\vec{a}$ ,  $\vec{OB}=\vec{b}$  とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$
 で求めることができる。

(2)  $\triangle ABC$  の面積は,  $\vec{AB}=\vec{a}=(a_1, a_2)$ ,  $\vec{AC}=\vec{b}=(b_1, b_2)$  とすると

$S = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$  でも求めることができる。

$$\begin{aligned} \text{解答 (1)} \quad S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4^2 \times 5^2 - (-10)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{300} = 5\sqrt{3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

(2)  $\vec{AB} = (-3, -1)$ ,  $\vec{AC} = (-2, 3)$  であるから

$$|\vec{AB}|^2 = (-3)^2 + (-1)^2 = 10$$

$$|\vec{AC}|^2 = (-2)^2 + 3^2 = 13$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-3) \times (-2) + (-1) \times 3 = 3$$

よって、求める三角形の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{10 \times 13 - 3^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{121} = \frac{11}{2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

別解 (2)  $\vec{AB} = (-3, -1)$ ,  $\vec{AC} = (-2, 3)$  であるから

$$S = \frac{1}{2} |(-3) \times 3 - (-1) \times (-2)| = \frac{1}{2} |-11| = \frac{11}{2} \quad \text{答}$$

教 p.30

6 2つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  について、次の問いに答えよ。

(1) 次が成り立つことを示せ。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

(2) 平行四辺形  $OACB$  において、 $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$  とする。(1)で示した同値関係から、平行四辺形  $OACB$  が長方形となるための必要十分条件を求めよ。

指針 ベクトルのなす角と内積 (1)  $|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}| \geq 0$  であるから、  
 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$  と  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$  は同値である。これを用いて証明する。

(2)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OC}$ ,  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{BA}$  であるから、(1)より

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \iff |\vec{OC}| = |\vec{BA}|$$

解答 (1)  $(\Rightarrow) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  とする。

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 \\ &= 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0, |\vec{a} - \vec{b}| \geq 0 \text{ であるから} \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$$

$(\Leftarrow) |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$  とする。

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \text{ より, } |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 0 \text{ であるから } 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{よって } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{したがって } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \quad \text{〔終〕}$$

$$(2) \vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b} \text{ より } \vec{a} + \vec{b} = \vec{OC}, \vec{a} - \vec{b} = \vec{BA}$$

ゆえに, (1)の同値関係は, 以下のように表すことができる。

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \Leftrightarrow |\vec{OC}| = |\vec{BA}|$$

$$\vec{OA} \neq \vec{0}, \vec{OB} \neq \vec{0} \text{ であるから, } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \text{ のとき } \vec{OA} \perp \vec{OB}$$

平行四辺形 OACB において,  $\vec{OA} \perp \vec{OB}$  のとき, 平行四辺形 OACB は長方形となる。

また, 平行四辺形 OACB が長方形のとき,  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$  である。

よって, 平行四辺形 OACB において

$$\text{平行四辺形 OACB が長方形} \Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$\text{ゆえに 平行四辺形 OACB が長方形} \Leftrightarrow |\vec{OC}| = |\vec{BA}|$$

$$\text{すなわち 平行四辺形 OACB が長方形} \Leftrightarrow OC = AB$$

したがって, 平行四辺形 OACB が長方形であるための必要十分条件は  
対角線 OC と AB の長さが等しい 〔図〕

## 第2節 ベクトルと平面図形

## 5 位置ベクトル

まとめ

## 1 位置ベクトル

平面上で、点  $O$  を定めておくと、どんな点  $P$  の位置も、ベクトル  $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$  によって決まる。

このようなベクトル  $\vec{p}$  を、点  $O$  に関する点  $P$  の位置ベクトルという。

また、位置ベクトルが  $\vec{p}$  である点  $P$  を、 $P(\vec{p})$  で表す。

2 点の位置ベクトルが同じならば、その 2 点は一致する。

**注意** 位置ベクトルにおける点  $O$  は平面上のどこに定めてもよい。以下、とくに断らない限り、1 つ定めた点  $O$  に関する位置ベクトルを考える。

2 位置ベクトルと  $\overrightarrow{AB}$ 

2 点  $A, B$  に対して

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

が成り立つから、次のことがいえる。

2 点  $A(\vec{a}), B(\vec{b})$  に対して  $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

## 3 内分点・外分点の位置ベクトル

2 点  $A(\vec{a}), B(\vec{b})$  に対して、線分  $AB$  を  $m:n$  に内分する点、 $m:n$  に外分する点の位置ベクトルは

$$\text{内分} \dots \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \quad \text{外分} \dots \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

とくに、線分  $AB$  の中点の位置ベクトルは  $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

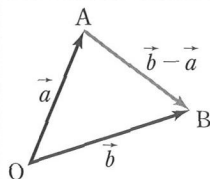
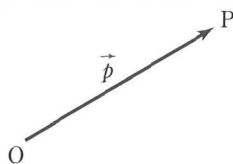
**注意** 内分の場合の  $n$  を  $-n$  におき換えたものが、外分の場合である。また、線分  $AB$  の内分点も外分点もその位置ベクトルは、適当な実数  $t$  を用いて  $(1-t)\vec{a} + t\vec{b}$  の形に表される。

## 4 三角形の重心の位置ベクトル

3 点  $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c})$  を頂点とする  $\triangle ABC$  の重心  $G$  の位置ベクトル  $\vec{g}$  は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

**注意** 三角形の重心は、3 本の中線が交わる点で、各中線を  $2:1$  に内分する。



## A 位置ベクトル

教 p.31

練習  
27

3点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$  に対して, 次のベクトルを  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  のいずれかを用いて表せ。

- (1)  $\overrightarrow{BC}$                       (2)  $\overrightarrow{CA}$                       (3)  $\overrightarrow{BA}$

指針 位置ベクトル 2点  $A, B$  に対して,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  が成り立つから, 2点  $A, B$  の位置ベクトルを, それぞれ  $\vec{a}, \vec{b}$  とするとき,  $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$  が成り立つ。

解答 (1)  $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$  答

(2)  $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c}$  答

(3)  $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$  答

## B 内分点・外分点の位置ベクトル

教 p.32

□  
□  
□  
深める

教科書の外分点  $Q$  の位置ベクトル  $\vec{q}$  を求める式①について,  $m < n$  のときも同じ式が得られることを確かめてみよう。

指針 図をかいて, 3点  $A, B, Q$  の位置関係を把握する。

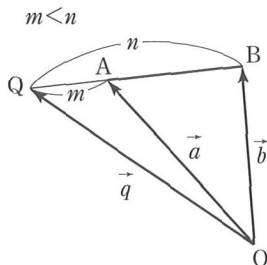
ここでは,  $Q, A, B$  の順に一直線上に並ぶ。

解答  $m < n$  のときに,  $AQ : AB = m : (n - m)$  であるから

$$\overrightarrow{AQ} = -\frac{m}{n-m} \overrightarrow{AB}$$

ゆえに  $\vec{q} - \vec{a} = -\frac{m}{n-m} (\vec{b} - \vec{a})$

よって  $\vec{q} = \left(1 + \frac{m}{n-m}\right) \vec{a} - \frac{m}{n-m} \vec{b}$   
 $= \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$  終

練習  
28

教 p.33

2点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  を結ぶ線分  $AB$  に対して, 次のような点の位置ベクトルを求めよ。

- (1) 2 : 3 に内分する点                      (2) 3 : 1 に内分する点  
 (3) 4 : 1 に外分する点                      (4) 1 : 2 に外分する点

指針 内分点・外分点の位置ベクトル

(1), (2) 線分  $AB$  を  $m : n$  に内分する点の位置ベクトルは

$$\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

(3), (4) 線分 AB を  $m:n$  に外分する点の位置ベクトルは

$$\frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

解答 (1)  $\frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$  答

(2)  $\frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$  答

(3)  $\frac{-\vec{a} + 4\vec{b}}{4-1} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$  答

(4)  $\frac{-2\vec{a} + \vec{b}}{1-2} = 2\vec{a} - \vec{b}$  答

### C 三角形の重心の位置ベクトル

教 p.35

練習  
29

3点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$ ,  $C(\vec{c})$  を頂点とする  $\triangle ABC$  において、辺 BC, CA, AB を 2:1 に内分する点を、それぞれ P, Q, R とする。また、 $\triangle ABC$  の重心を G,  $\triangle PQR$  の重心を  $G'$  とする。

(1) 点  $G'$  の位置ベクトル  $\vec{g'}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ。

(2) 等式  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  が成り立つことを示せ。

#### 指針 三角形の重心の位置ベクトル

(1) P, Q, R の位置ベクトルを、それぞれ  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{r}$  とすると

$$\vec{g'} = \frac{\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}}{3}$$

(2)  $\vec{GA}$ ,  $\vec{GB}$ ,  $\vec{GC}$  を、それぞれ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  で表す。

解答 (1) P, Q, R の位置ベクトルを、それぞれ  $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ,  $\vec{r}$  とすると

$$\vec{p} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3}, \quad \vec{q} = \frac{\vec{c} + 2\vec{a}}{3}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

であるから

$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{r} = \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} + \frac{\vec{c} + 2\vec{a}}{3} + \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

$$= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

よって  $\vec{g'} = \frac{\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}}{3}$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad \text{答}$$

(2) G の位置ベクトルを  $\vec{g}$  とすると,  $\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$  であるから

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{g}) + (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{g}) + (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{g}) \\
 &= \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - 3\overrightarrow{g} \\
 &= \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} - 3\left(\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}\right) = \vec{0}
 \end{aligned}$$

よって  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$  終

## 6 ベクトルの図形への応用

### まとめ

#### 1 一直線上にある点

2点A, Bが異なるとき

点Cが直線AB上にある  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$  となる実数  $k$  がある

#### 2 ベクトルの分解の利用

2つのベクトル  $\vec{a}, \vec{b}$  は  $\vec{0}$  でなく、また平行でないとする。このとき、任意のベクトル  $\vec{p}$  は、 $\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$  の形にただ1通りに表される。

$$s\vec{a} + t\vec{b} = s'\vec{a} + t'\vec{b} \Leftrightarrow s = s', t = t'$$

#### 3 内積の利用

ベクトルの内積を利用して、図形の性質を証明するとき、内積に関しては、次のことがよく利用される。

[1]  $AB^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$

[2] 3点O, A, Bが異なるとき

$$OA \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

### A 一直線上にある点

教 p.36

練習  
30

△ABCにおいて、辺ABを1:2に内分する点をD、辺BCを3:1に内分する点をEとし、線分CDの中点をFとする。このとき、3点A, F, Eは一直線上にあることを証明せよ。

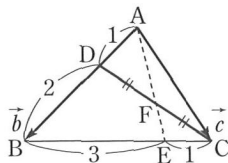
指針 3点が一直線上にあることの証明  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$  として、 $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$  をそれぞれ  $\vec{b}, \vec{c}$  で表し、 $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AF}$  となる実数  $k$  があることを示す。

解答  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$  とする。

BE:EC=3:1であるから

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{3+1} = \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{4}$$

また、Fは線分CDの中点であるから





$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} \vec{b} + \vec{c} \right) \\ &= \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{6}\end{aligned}$$

よって  $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AE}$

したがって、3点 A, F, E は一直線上にある。 〔終〕

## B 2 直線の交点

教 p.37

### 練習 31

△OAB において、辺 OA を 3 : 2 に内分する点を C、辺 OB を 1 : 2 に内分する点を D とし、線分 AD と線分 BC の交点を P とする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とするとき、 $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。

**指針** 線分の交点 AP : PD = s : (1-s), BP : PC = t : (1-t) とすると、 $\overrightarrow{OP}$  は  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて 2 通りに表されるが、 $\overrightarrow{OP}$  の表し方はただ 1 通りしかないので、s, t の値が定まる。

**解答** AP : PD = s : (1-s) とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-s) \overrightarrow{OA} + s \overrightarrow{OD} \\ &= (1-s) \vec{a} + \frac{1}{3} s \vec{b} \quad \cdots \cdots ①\end{aligned}$$

BP : PC = t : (1-t) とすると

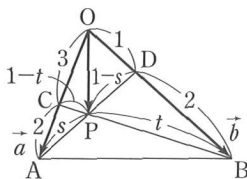
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t \overrightarrow{OC} + (1-t) \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3}{5} t \vec{a} + (1-t) \vec{b} \quad \cdots \cdots ②\end{aligned}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  で、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行でないから、 $\overrightarrow{OP}$  の  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いた表し方はただ 1 通りである。

$$①, ② \text{ から } 1-s = \frac{3}{5}t, \frac{1}{3}s = 1-t$$

$$\text{これを解くと } s = \frac{1}{2}, t = \frac{5}{6}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} \quad \text{答}$$



← ①, ②のどちらかに代入する。

## C 内積の利用

教 p.38

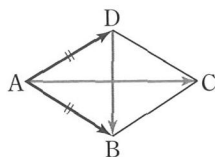
練習  
32

平行四辺形 ABCD において、

 $AB=AD$  のとき、 $AC \perp DB$ 

である。

このことを、ベクトルを用いて証明せよ。



指針 内積の利用  $AB=AD$  すなわち  $|\vec{AB}|^2 = |\vec{AD}|^2$  から、 $\vec{AC} \cdot \vec{DB} = 0$  を示す。

解答 平行四辺形 ABCD において

$$\vec{AB} = \vec{b}, \vec{AD} = \vec{d}$$

とすると

$$\vec{AC} = \vec{b} + \vec{d}, \vec{DB} = \vec{b} - \vec{d}$$

であるから

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{DB} &= (\vec{b} + \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{d}) \\ &= |\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{b} - |\vec{d}|^2 \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{d}|^2 \end{aligned}$$

$AB=AD$  のとき、 $|\vec{AB}|^2 = |\vec{AD}|^2$  すなわち  $|\vec{b}|^2 = |\vec{d}|^2$  であるから

$$\vec{AC} \cdot \vec{DB} = 0$$

$\vec{AC} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{DB} \neq \vec{0}$  であるから  $\vec{AC} \perp \vec{DB}$

よって  $AC \perp DB$

したがって、 $AB=AD$  のとき  $AC \perp DB$  である。 終

## 7 図形のベクトルによる表示

まとめ

1 ベクトル  $\vec{d}$  に平行な直線のベクトル方程式

点  $A(\vec{a})$  を通り、ベクトル  $\vec{d}$  に平行な直線を  $g$  とする。

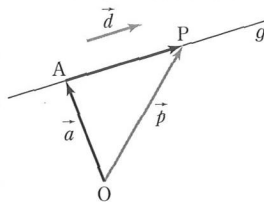
直線  $g$  上のどんな点  $P(\vec{p})$  に対しても、 $\vec{AP} = t\vec{d}$  となる実数  $t$  がただ 1 つ定まる。

$\vec{AP} = \vec{p} - \vec{a}$  であるから

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①において、 $t$  がすべての実数値をとって変化するとき、点  $P(\vec{p})$  の全体は直線  $g$  になる。①を直線  $g$  のベクトル方程式といい、 $t$  を媒介変数またはパラメータという。

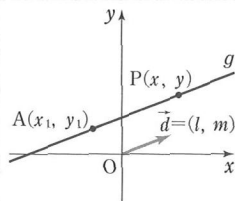
また、 $\vec{d}$  を直線  $g$  の方向ベクトルという。



## 2 直線の媒介変数表示

O を原点とする座標平面上で、点  $A(x_1, y_1)$  を通り、ベクトル  $\vec{d}=(l, m)$  に平行な直線  $g$  上の点を  $P(x, y)$  とする。

ベクトル方程式  $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$  において、  
 $\vec{p}=(x, y)$ ,  $\vec{a}=(x_1, y_1)$ ,  $\vec{d}=(l, m)$  であるから  
 $(x, y)=(x_1, y_1)+t(l, m)$



よって 
$$\begin{cases} x=x_1+lt \\ y=y_1+mt \end{cases} \dots\dots ②$$

②を直線  $g$  の媒介変数表示という。

②から  $t$  を消去すると、次のことがいえる。

点  $A(x_1, y_1)$  を通り、 $\vec{d}=(l, m)$  に平行な直線の方程式は

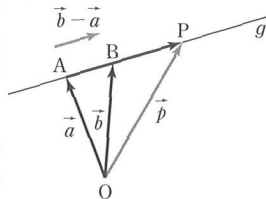
$$m(x-x_1)-l(y-y_1)=0$$

## 3 異なる2点を通る直線のベクトル方程式

異なる2点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  を通る直線  $AB$  のベクトル方程式は

$$[1] \quad \vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

$$[2] \quad \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}, \quad s+t=1$$



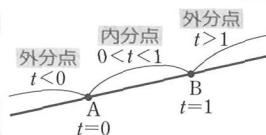
解説 異なる2点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  を通る直線のベクトル方程式は  $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$  で  $\vec{d}=\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$  として整理すると、次の式が得られる。

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

$$1-t=s \text{ とおくと } \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}, \quad s+t=1$$

## 4 点の存在範囲(1)

ベクトル方程式  $\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$  において、実数  $t$  のとる値によって点  $P(\vec{p})$  の存在範囲は図のようになる。



## 5 点の存在範囲(2)

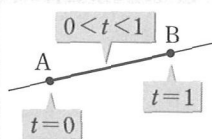
異なる2点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  について、次の式を満たす点  $P(\vec{p})$  の存在範囲は直線  $AB$  である。

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}, \quad s+t=1$$

$t=0$  のとき  $P$  は  $A$  に一致し、 $t=1$  のとき  $P$  は  $B$  に一致する。また、 $0 < t < 1$  のとき、 $P$  は線分  $AB$  の内分点である。

$s+t=1$  のとき、 $s \geq 0$ ,  $t \geq 0$  とすると  $0 \leq t \leq 1$  であるから、次の式を満たす点  $P(\vec{p})$  の存在範囲は、線分  $AB$  である。

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}, \quad s+t=1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$



## 6 点の存在範囲(3)

$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ ,  $0 \leq s+t \leq 1$ ,  $s \geq 0$ ,  $t \geq 0$  を満たす点  $P$  の存在範囲は、 $\triangle OAB$  の周および内部である。

7 ベクトル  $\vec{n}$  に垂直な直線のベクトル方程式

点  $A(\vec{a})$  を通り、ベクトル  $\vec{n}$  に垂直な直線を  $g$  とする。

直線  $g$  上の点  $P(\vec{p})$  が  $A$  に一致しないとき、 $\vec{n} \perp \vec{AP}$  である。すなわち、 $\vec{n} \cdot \vec{AP} = 0$  となり、次の式が得られる。

$$\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$P$  が  $A$  に一致するときは、 $\vec{p} - \vec{a} = \vec{0}$  であるから、このときも①は成り立つ。

①は、点  $A(\vec{a})$  を通り、 $\vec{n}$  に垂直な直線  $g$  のベクトル方程式である。

直線  $g$  に垂直なベクトル  $\vec{n}$  を、直線  $g$  の法線ベクトルという。

$O$  を原点とする座標平面上で、点  $A(x_1, y_1)$  を通り、 $\vec{n} = (a, b)$  に垂直な直線  $g$  上の点を  $P(x, y)$  とする。

ベクトル方程式①において  $\vec{n} = (a, b)$ ,  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{p} = (x, y)$ ,  $\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1, y - y_1)$  であるから、次のことがいえる。

[1] 点  $A(x_1, y_1)$  を通り、 $\vec{n} = (a, b)$  に垂直な直線の方程式は

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$$

[2] ベクトル  $\vec{n} = (a, b)$  は、直線  $ax + by + c = 0$  に垂直である。

## 8 円のベクトル方程式

点  $A(\vec{a})$  を中心とする半径  $r$  の円上のどんな点  $P(\vec{p})$  に対しても、 $|\vec{AP}| = r$  が成り立つから、点  $A(\vec{a})$  を中心とする半径  $r$  の円のベクトル方程式は

$$|\vec{p} - \vec{a}| = r$$

で表される。これは、また、

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = r^2$$

で表される。

## 9 AB を直径とする円のベクトル方程式

2点  $A(\vec{a})$ ,  $B(\vec{b})$  を結ぶ線分  $AB$  を直径とする円のベクトル方程式は

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

解説 円上の点を  $P(\vec{p})$  とすると、 $P$  が  $A$  にも  $B$  にも

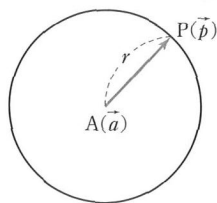
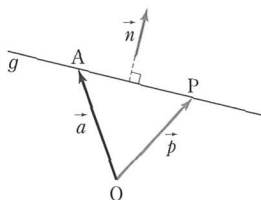
一致しないとき  $AP \perp BP$

すなわち  $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$

よって  $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

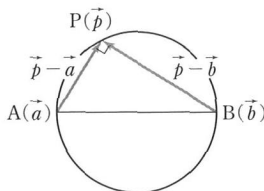
$P$  が  $A$  または  $B$  に一致するときは、

$\vec{p} - \vec{a} = \vec{0}$  または  $\vec{p} - \vec{b} = \vec{0}$  で、このときも①は成り立つ。



$$|\vec{p} - \vec{a}| = r$$

中心の位置ベクトル 半径



A ベクトル  $\vec{d}$  に平行な直線

教 p.40

練習  
33

点  $A(2, -1)$  を通り、 $\vec{d} = (-4, 3)$  に平行な直線を媒介変数表示せよ。  
また、媒介変数を消去した式で表せ。

指針 ベクトル  $\vec{d}$  に平行な直線の媒介変数表示 点  $A(x_1, y_1)$  を通り、 $\vec{d} = (l, m)$  に平行な直線の媒介変数表示は

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases} \quad t \text{ は実数}$$

媒介変数  $t$  を消去すると

$$m(x - x_1) - l(y - y_1) = 0$$

解答 媒介変数表示すると

$$\begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{答}$$

媒介変数  $t$  を消去すると

$$3(x - 2) - (-4) \times \{y - (-1)\} = 0$$

すなわち

$$3x + 4y - 2 = 0 \quad \text{答}$$

## B 異なる2点 A, B を通る直線

## C 平面上の点の存在範囲

教 p.41

練習  
34

$\triangle OAB$  において、次の式を満たす点  $P$  の存在範囲を求めよ。

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}, \quad s + t = \frac{1}{2}, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

指針 ベクトル方程式を満たす点の存在範囲

$\vec{OP} = s'\vec{OA} + t'\vec{OB} \quad (s' + t' = 1)$  の形に変形する。

解答  $s + t = \frac{1}{2}$  から  $2s + 2t = 1$  ここで、 $2s = s'$ ,  $2t = t'$  とおくと

$$\vec{OP} = s'\left(\frac{1}{2}\vec{OA}\right) + t'\left(\frac{1}{2}\vec{OB}\right), \quad s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

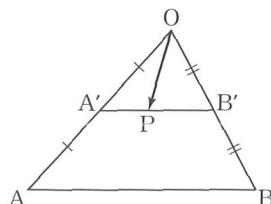
よって、 $\vec{OA'} = \frac{1}{2}\vec{OA}$ ,  $\vec{OB'} = \frac{1}{2}\vec{OB}$  となる点  $A'$ ,  $B'$  をとると

$$\vec{OP} = s'\vec{OA'} + t'\vec{OB'},$$

$$s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

したがって、点  $P$  の存在範囲は線分  $A'B'$  である。答

注意 「辺  $OA$ , 辺  $OB$  の中点をそれぞれ  $A'$ ,  $B'$  とすると、線分  $A'B'$ 」と答えてもよい。



練習  
35

△OABにおいて、次の式を満たす点Pの存在範囲を求めよ。

$$(1) \quad \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq s+t \leq 2, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

$$(2) \quad \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq s+t \leq \frac{1}{2}, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

指針 ベクトル方程式を満たす点の存在範囲

練習34と同じように、まず、 $\overrightarrow{OP} = s'\overrightarrow{\square} + t'\overrightarrow{\square}$  ( $s'+t'=1$ ) の形に変形することを考える。

$$(1) \quad \frac{s}{2} = s', \quad \frac{t}{2} = t' \text{ とおくと } 0 \leq s'+t' \leq 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0 \text{ となる。}$$

$$(2) \quad 2s = s', \quad 2t = t' \text{ とおくと } 0 \leq s'+t' \leq 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0 \text{ となる。}$$

解答 (1)  $0 \leq s+t \leq 2$  の各辺を2で割ると

$$0 \leq \frac{s}{2} + \frac{t}{2} \leq 1$$

$$\frac{s}{2} = s', \quad \frac{t}{2} = t' \text{ とおくと}$$

$$0 \leq s'+t' \leq 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

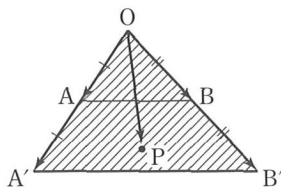
$$= \frac{s}{2}(2\overrightarrow{OA}) + \frac{t}{2}(2\overrightarrow{OB}) = s'(2\overrightarrow{OA}) + t'(2\overrightarrow{OB})$$

よって、 $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$  を満たす点  $A'$ ,  $B'$  をとると

$$\overrightarrow{OP} = s'\overrightarrow{OA'} + t'\overrightarrow{OB'}, \quad 0 \leq s'+t' \leq 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

したがって、点Pの存在範囲は

△OA'B'の周および内部である。図



(2)  $0 \leq s+t \leq \frac{1}{2}$  の各辺に2を掛けると

$$0 \leq 2s + 2t \leq 1$$

$$2s = s', \quad 2t = t' \text{ とおくと}$$

$$0 \leq s'+t' \leq 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

$$= 2s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right) + 2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

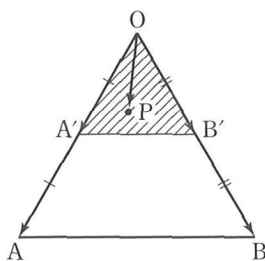
$$= s'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right) + t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

よって、 $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$  を満たす点  $A'$ ,  $B'$  をとると

$$\overrightarrow{OP} = s'\overrightarrow{OA'} + t'\overrightarrow{OB'}, \quad 0 \leq s'+t' \leq 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

したがって、点Pの存在範囲は

△OA'B'の周および内部である。図



**注意** 「辺 OA, 辺 OB の中点をそれぞれ A', B' とすると,  $\triangle OA'B'$  の周および内部」  
と答えてもよい。

## D ベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線

教 p.43

練習  
36

次の点 A を通り, ベクトル  $\vec{n}$  に垂直な直線の方程式を求めよ。

- (1)  $A(3, 4), \vec{n} = (1, 2)$       (2)  $A(-1, 2), \vec{n} = (3, -4)$

**指針** 定ベクトルに垂直な直線の方程式 点  $(x_1, y_1)$  を通り, ベクトル  $(a, b)$  に垂直な直線の方程式は  $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$   
与えられた値を代入して,  $x, y$  について整理する。

**解答** (1) 求める直線の方程式は  $1(x-3)+2(y-4)=0$

よって  $x-3+2y-8=0$

したがって  $x+2y-11=0$  答

(2) 求める直線の方程式は

$$3\{x-(-1)\}-4(y-2)=0$$

よって  $3x+3-4y+8=0$

したがって  $3x-4y+11=0$  答

## E 円のベクトル方程式

教 p.44

練習  
37

点 A( $\vec{a}$ ) が与えられているとき, 次のベクトル方程式において点 P( $\vec{p}$ ) の全体は円となる。円の中心の位置ベクトル, 円の半径を求めよ。

- (1)  $|\vec{p}-\vec{a}|=3$       (2)  $|2\vec{p}-\vec{a}|=4$

**指針** 円のベクトル方程式 (2) 円のベクトル方程式  $|\vec{p}-\vec{b}|=r$  で表せるよう, 与えられたベクトル方程式を変形する。

**解答** (1) 中心の位置ベクトルは  $\vec{a}$ , 半径は 3 答

(2)  $|2\vec{p}-\vec{a}|=4$  を変形すると

$$2\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=4$$

よって  $\left|\vec{p}-\frac{1}{2}\vec{a}\right|=2$

したがって, 中心の位置ベクトルは  $\frac{1}{2}\vec{a}$ , 半径は 2 答

練習  
38

平面上の異なる2点O, Aに対して $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ とすると, 線分OAを直径とする円のベクトル方程式は, その円上の点Pについて $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ として,  $\vec{p} \cdot (\vec{p}-\vec{a})=0$ で与えられることを示せ。

指針 円のベクトル方程式 直径に対する円周角の性質により,  $\angle OPA=90^\circ$ であるから,  $OP \perp AP$ が成り立つ。これをベクトルで表す。

本書35ページのまとめ9において, AをOに, BをAに変えた場合である。

解答 PがOにもAにも一致しないとき

$$OP \perp AP \quad \text{すなわち} \quad \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\text{よって} \quad \vec{p} \cdot (\vec{p}-\vec{a})=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

PがOまたはAに一致するときは,

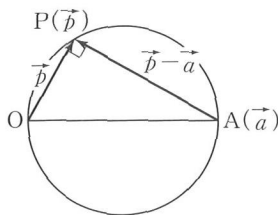
$$\vec{p}=\vec{0} \quad \text{または} \quad \vec{p}-\vec{a}=\vec{0}$$

で, このときも①は成り立つ。

したがって, 線分OAを直径とする円のベク

トル方程式は

$$\vec{p} \cdot (\vec{p}-\vec{a})=0 \quad \text{終}$$



## 研究 点と直線の距離

## まとめ

## 点と直線の距離

点 $P(x_1, y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 $d$ は

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



## 第1章 第2節

## 問 題

教 p.46

- 7 平行四边形 OABC の辺 OA と辺 OC を 2:1 に内分する点を、それぞれ D, E とし、対角線 OB を 1:2 に内分する点を F とする。このとき、3 点 D, F, E は一直線上にあることを証明せよ。

指針 3 点が一直線上にあることの証明  $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$  として、 $\overrightarrow{DE}$ ,  $\overrightarrow{DF}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  で表し、 $\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{DF}$  となる実数  $k$  があることを示す。

解答  $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$  とする。

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}$$

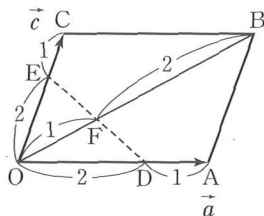
$$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD}$$

$$=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{c})-\frac{2}{3}\vec{a}$$

$$=\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{1}{3}\vec{a}$$

よって  $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{DF}$

したがって、3 点 D, F, E は一直線上にある。 [終]



教 p.46

- 8  $\triangle OAB$  において、辺 OA を 2:3 に内分する点を C, 辺 OB を 1:3 に内分する点を D, 辺 AB の中点を E とし、線分 BC と線分 ED の交点を P とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$  とするとき、 $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  を用いて表せ。

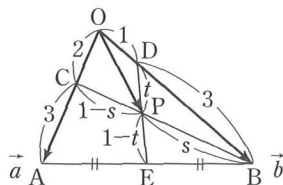
指針 線分の交点 点 P は線分 BC を  $s:(1-s)$  に内分する点として、 $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表す。また、点 P は線分 DE を  $t:(1-t)$  に内分する点として、 $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  で表す。 $\overrightarrow{OP}$  の表し方はただ 1 通りしかないので、 $s, t$  の値が定まる。

解答 BP:PC= $s:(1-s)$  とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= s\overrightarrow{OC} + (1-s)\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2}{5}s\vec{a} + (1-s)\vec{b} \quad \dots\dots ①\end{aligned}$$

DP:PE= $t:(1-t)$  とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OE} + (1-t)\overrightarrow{OD} \\ &= t\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) + (1-t)\times\frac{1}{4}\vec{b} \\ &= \frac{t}{2}\vec{a} + \frac{t+1}{4}\vec{b} \quad \dots\dots ②\end{aligned}$$



$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$  で、 $\vec{a}$  と  $\vec{b}$  は平行でないから、 $\overrightarrow{OP}$  の  $\vec{a}, \vec{b}$  を用いた表し方はただ1通りである。

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } \frac{2}{5}s = \frac{t}{2}, 1-s = \frac{t+1}{4}$$

$$\text{これを解くと } s = \frac{5}{8}, t = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} \quad \text{答}$$

教 p.46

9 法線ベクトルを利用して、2 直線  $2x+4y+1=0$ ,  $x-3y-7=0$  のなす鋭角  $\alpha$  を求めよ。

指針 2 直線のなす鋭角 直線  $ax+by+c=0$  の法線ベクトルの1つは  $(a, b)$  である。

2 直線の法線ベクトル  $\vec{m}, \vec{n}$  のなす角を  $\theta$  とする。

$$[1] \quad \cos \theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} \text{ から } \theta \text{ を求める。}$$

$$[2] \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \text{ のとき } \alpha = \theta$$

$$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ のとき } \alpha = 180^\circ - \theta$$

解答 2 直線の法線ベクトルのなす角を  $\theta$  とすると、求める角  $\alpha$  は  $\theta$  または  $180^\circ - \theta$  に等しい。

$$\text{直線 } 2x+4y+1=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

の法線ベクトルの1つを  $\vec{m}$  とすると

$$\vec{m} = (2, 4)$$

$$\text{直線 } x-3y-7=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

の法線ベクトルの1つを  $\vec{n}$  とすると

$$\vec{n} = (1, -3)$$

このとき

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = 2 \times 1 + 4 \times (-3) = -10$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

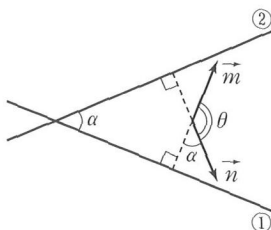
であるから

$$\cos \theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{-10}{2\sqrt{5} \sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

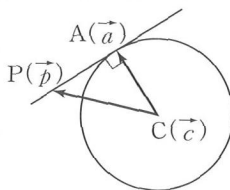
$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  の範囲で  $\theta$  を求めると

$$\theta = 135^\circ$$

よって、求める鋭角  $\alpha$  は  $\alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$  答



- 10 点  $C(\vec{c})$  を中心とする半径  $r$  の円上の点を  $A(\vec{a})$  とする。このとき、点  $A$  における円の接線のベクトル方程式は、その接線上の点を  $P(\vec{p})$  として  $(\vec{p}-\vec{c}) \cdot (\vec{a}-\vec{c}) = r^2$  で与えられることを示せ。



指針 円の接線のベクトル方程式 円の接線  $AP$  は、半径  $CA$  に垂直であるから

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CA} \quad \text{また} \quad CA=r \quad \text{これをベクトルで表す。}$$

解答  $P(\vec{p})$  を接線上の  $A$  以外の点とする。

接線  $AP$  は点  $A$  において半径  $CA$  に垂直であるから

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CA}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c} \quad \text{であるから} \quad (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$$

$$\text{よって} \quad \{(\vec{p} - \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{c})\} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$$

$$(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = |\vec{a} - \vec{c}|^2$$

$$|\vec{a} - \vec{c}|^2 = r^2 \quad \text{であるから} \quad (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = r^2$$

$P$  が  $A$  に一致するときは  $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$  であるから、このときも  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$  が成り立つ。

$$\text{よって、上と同様にして} \quad (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = r^2$$

したがって、接線のベクトル方程式は  $(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = r^2$  図

- 11 海上を航行する 2 せきの船  $A, B$  があり、船  $B$  は船  $A$  から見て西に 50 km の位置にある。船  $A$  は北に、船  $B$  は北東に向かって一定の速さで航行しており、船  $A$  の速さは時速 20 km であるとする。

- (1) 船  $B$  も時速 20 km で航行しているとき、船  $B$  が船  $A$  から見てちょうど南東方向に見えるのは何時間後か求めよ。
- (2) 衝突を回避するために、2 せきの船  $A, B$  が衝突する船  $B$  の速さを事前に求めたい。船  $A$  と衝突してしまう船  $B$  の速さを求めよ。

指針 位置ベクトル

- (1) 東西を  $x$  軸、南北を  $y$  軸にとって考える。南東方向を表すベクトルの 1 つは  $(1, -1)$  であるから、 $\overrightarrow{AB} = k(1, -1)$  と表されることを利用する。
- (2) 船  $A$  と船  $B$  が衝突するのは  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$  となるときである。このときの船  $B$  の速さを求める。

解答  $x$  軸の正の方向を東,  $y$  軸の正の方向を北にとり,  
船 B が船 A から見て西に 50 km の位置にあると  
きの B の位置を原点 O とし, 1 km を距離 1 とす  
る座標平面を考える。

また,  $t$  時間後の 2 秒きの船の位置を A, B とする。

(1)  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$  を成分表示すると

$$\overrightarrow{OA} = (50, 20t), \quad \overrightarrow{OB} = (10\sqrt{2}t, 10\sqrt{2}t)$$

船 B が船 A から見てちょうど南東方向に見えるとき,

$$\overrightarrow{AB} = k(1, -1) (k > 0) \text{ と表される。}$$

$$\text{ゆえに} \quad (10\sqrt{2}t - 50, 10\sqrt{2}t - 20t) = k(1, -1)$$

$$\text{すなわち} \quad 10\sqrt{2}t - 50 = k, \quad 10\sqrt{2}t - 20t = -k$$

$$\text{これを解くと} \quad t = \frac{5\sqrt{2} + 5}{2}, \quad k = 25\sqrt{2}$$

$$\text{よって} \quad \frac{5\sqrt{2} + 5}{2} \text{ 時間後} \quad \text{答}$$

(2) 船 B の速さを時速  $v$  km とすると

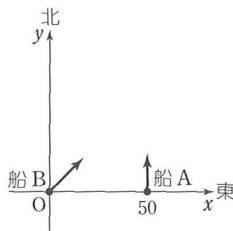
$$\overrightarrow{OA} = (50, 20t), \quad \overrightarrow{OB} = \left( \frac{v}{\sqrt{2}}t, \frac{v}{\sqrt{2}}t \right)$$

船 A と船 B が衝突するのは,  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$  のときであるから

$$50 = \frac{vt}{\sqrt{2}}, \quad 20t = \frac{vt}{\sqrt{2}}$$

$$\text{これを解くと} \quad v = 20\sqrt{2}, \quad t = \frac{5}{2}$$

$$\text{よって} \quad \text{時速 } 20\sqrt{2} \text{ km} \quad \text{答}$$



## 第1章 章末問題 A

教 p.47

1. 平行四辺形 ABCD において、対角線の交点を E とする。  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$  とするとき、次のベクトルを  $\vec{b}$ ,  $\vec{d}$  を用いて表せ。

(1)  $\overrightarrow{EC}$  (2)  $\overrightarrow{BE}$  (3)  $\overrightarrow{EA}$

指針 **ベクトルの分解** 平行四辺形であるから、E は対角線 AC, BD それぞれの中点である。

解答 (1)  $\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d}) = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{d}$  答

(2)  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$   
 $= \frac{1}{2}(\vec{d} - \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$  答

(3)  $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{EC}$   
 $= -\left(-\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{d}\right) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}$  答

教 p.47

2.  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 2$  のとき、次の値の最大値、最小値を求めよ。

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  (2)  $|\vec{a} - \vec{b}|$

指針 **内積の性質** ベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角によって、(1), (2)のいずれの値も変化する。

(2)  $|\vec{a} - \vec{b}|^2$  として内積の計算法則を利用する。

解答  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角を  $\theta$  ( $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ) とする。

(1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\cos\theta$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  より  $-1 \leq \cos\theta \leq 1$  であるから  
 $-2 \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 2$

よって、 $\vec{a} \cdot \vec{b}$  は 最大値 2, 最小値 -2 答

(2)  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2^2$   
 $= 5 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

(1)より、 $-2 \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq 2$  であるから

$1 \leq 5 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 9$

$|\vec{a} - \vec{b}| \geq 0$  より  $1 \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq 3$

よって、 $|\vec{a} - \vec{b}|$  は 最大値 3, 最小値 1 答

3.  $\vec{a} = (2, x)$ ,  $\vec{b} = (x+1, 3)$  とする。

(1)  $2\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} - 2\vec{b}$  が垂直になるように,  $x$  の値を定めよ。

(2)  $2\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} - 2\vec{b}$  が平行になるように,  $x$  の値を定めよ。

指針 ベクトルの垂直, 平行  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  で,  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

解答  $2\vec{a} + \vec{b} = 2(2, x) + (x+1, 3) = (x+5, 2x+3)$

$$\vec{a} - 2\vec{b} = (2, x) - 2(x+1, 3) = (-2x, x-6)$$

(1)  $2\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} - 2\vec{b}$  が垂直になるとき

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$$

$$\text{すなわち } (x+5)(-2x) + (2x+3)(x-6) = 0$$

$$\text{式を整理して } -19x - 18 = 0$$

$$\text{これを解いて } x = -\frac{18}{19} \quad \text{答}$$

(2)  $2\vec{a} + \vec{b}$  と  $\vec{a} - 2\vec{b}$  が平行になるとき

$$(x+5)(x-6) - (2x+3)(-2x) = 0$$

$$\text{式を整理して } x^2 + x - 6 = 0$$

$$\text{すなわち } (x-2)(x+3) = 0$$

$$\text{これを解いて } x = 2, -3 \quad \text{答}$$

4.  $\triangle ABC$  の外心を  $O$ , 重心を  $G$  とし,  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  とする。

(1) 点  $O$ ,  $G$ ,  $H$  は一直線上にあることを証明せよ。

(2)  $H$  は  $\triangle ABC$  の垂心であることを証明せよ。

指針 三角形の外心, 重心

(1)  $\vec{OH} = k\vec{OG}$  ( $k$  は実数) の形で表されることを示せばよい。

(2)  $\triangle ABC$  が直角三角形の場合と, そうでない場合に分けて示す。

直角三角形でない場合に  $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$  を利用する。

解答 (1)  $G$  は  $\triangle ABC$  の重心であるから

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$$

$$\text{よって } \vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$$

したがって, 点  $O$ ,  $G$ ,  $H$  は一直線上にある。終

(2)  $\angle A = 90^\circ$  のとき,  $B$ ,  $C$  は外接円の直径の両端の点であるから

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA}$$

よって、HはAに一致する。

このとき、Hは $\triangle ABC$ の垂心である。

同様に、 $\angle B=90^\circ$ 、 $\angle C=90^\circ$ の場合もそれぞれ $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}$ 、 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}$ となりHはB、Cにそれぞれ一致しHは $\triangle ABC$ の垂心となる。

$\triangle ABC$ が直角三角形でないとき

$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

線分OC、線分OBはともに外接円の半径であるから

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

$\overrightarrow{AH} \neq \vec{0}$ 、 $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$ であるから  $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$  よって  $AH \perp BC$

同様にして  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ 、 $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  が示されるから

$$BH \perp CA, CH \perp AB$$

したがって、Hは $\triangle ABC$ の垂心である。 (終)

## 教 p.47

5.  $\triangle ABC$ において、辺ABを1:2に内分する点をD、辺BCを3:1に内分する点をE、辺CAを2:3に内分する点をFとする。また、線分AEと線分CDの交点をPとするとき、次の問いに答えよ。

(1)  $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$  とするとき、 $\overrightarrow{AP}$  を  $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いて表せ。

(2) 3点B、P、Fは一直線上にあることを示せ。

指針 3点が一直線上にあることの証明

(1)  $\overrightarrow{AP}$  を  $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いて2通りに表す。

(2)  $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BF}$  となる実数  $k$  があることを示す。

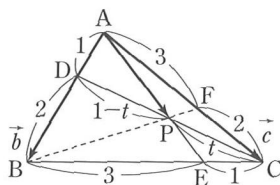
解答 (1) Pは線分AE上の点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= k\overrightarrow{AE} \\ &= k\left(\frac{\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{3+1}\right) \\ &= \frac{1}{4}k\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}k\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{4}k\vec{b} + \frac{3}{4}k\vec{c} \quad \cdots \cdots ①\end{aligned}$$

また、 $CP:PD=t:(1-t)$ とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= t\overrightarrow{AD} + (1-t)\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3}t\vec{b} + (1-t)\vec{c} \quad \cdots \cdots ②\end{aligned}$$

$\vec{b} \neq \vec{0}$ 、 $\vec{c} \neq \vec{0}$  で、 $\vec{b}$  と  $\vec{c}$  は平行でないから、 $\overrightarrow{AP}$  の  $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を用いた表し方はただ1通りである。



$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } \frac{1}{4}k = \frac{1}{3}t, \quad \frac{3}{4}k = 1 - t$$

$$\text{これを解くと } k = \frac{2}{3}, \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c} \quad \text{答}$$

$$(2) \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{c} = \frac{-5\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}}{6}$$

$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{3}{5}\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} + \frac{3}{5}\overrightarrow{c} = \frac{-5\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}}{5}$$

$$\text{よって } \overrightarrow{BP} = \frac{5}{6}\overrightarrow{BF}$$

したがって、3点 B, P, F は一直線上にある。 終

教 p.47

6.  $\triangle OAB$  において、辺  $OA$  を  $2:1$  に内分する点を  $C$ 、辺  $OB$  の中点を  $D$  とし、線分  $AD$ ,  $BC$  の交点を  $P$  とする。実数  $m, n$  を用いて、 $\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$  と表すとき、次の□に適する数はいくつ。また、 $m, n$  の値を求めよ。

$$(1) \overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + \square n\overrightarrow{OD} \quad (2) \overrightarrow{OP} = \square m\overrightarrow{OC} + n\overrightarrow{OB}$$

指針 ベクトルの等式と点の存在範囲

$m, n$  の値は、点  $P$  が線分  $AD$ ,  $BC$  上にあること、すなわち

$$\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}, \quad s+t=1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

を利用する。

解答 (1)  $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OD}$  であるから

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + 2n\overrightarrow{OD} \quad \text{答 } 2$$

$$(2) \overrightarrow{OC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} \text{ より, } \overrightarrow{OA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OC} \text{ であるから}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{2}m\overrightarrow{OC} + n\overrightarrow{OB} \quad \text{答 } \frac{3}{2}$$

(1)より、 $P$  は線分  $AD$  上の点であるから

$$m + 2n = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(2)より、 $P$  は線分  $BC$  上の点であるから

$$\frac{3}{2}m + n = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を連立させて解くと } m = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4} \quad \text{答}$$



## 第1章 章末問題 B

教 p.48

7.  $\triangle ABC$  と点  $P$  に対して、等式  $3\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 5\overrightarrow{CP} = \vec{0}$  が成り立つ。

- (1) 点  $P$  は  $\triangle ABC$  に対してどのような位置にあるか。  
 (2) 面積の比  $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$  を求めよ。

指針 等式を満たす点の位置、面積の比

- (1) 与えられた等式を  $A$  を始点とするベクトルで表し、 $\overrightarrow{AP}$  について解く。  
 (2) 高さが等しい三角形の面積比は、底辺の比に等しい。

解答 (1)  $3\overrightarrow{AP} + 4\overrightarrow{BP} + 5\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{AP} + 4(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 5(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC})$   
 $= 12\overrightarrow{AP} - (4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC})$

$12\overrightarrow{AP} - (4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}) = \vec{0}$  であるから

$$\overrightarrow{AP} = \frac{4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}{12} = \frac{3}{4} \left( \frac{4\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC}}{5+4} \right)$$

よって、辺  $BC$  を  $5:4$  に内分する点を  $Q$  とすると

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AQ}$$

ゆえに、 $P$  は線分  $AQ$  を  $3:1$  に内分する点である。

□ 辺  $BC$  を  $5:4$  に内分する点を  $Q$  とすると、 $P$  は線分  $AQ$  を  $3:1$  に内分する点

- (2)  $\triangle ABC$  の面積を  $S$  とする。

$\triangle PBC : \triangle ABC = PQ : AQ = 1:4$  であるから

$$\triangle PBC = \frac{1}{4} S \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\triangle ACQ : \triangle ABC = CQ : CB = 4:9$  であるから

$$\triangle ACQ = \frac{4}{9} S$$

さらに、 $\triangle PCA : \triangle ACQ = AP : AQ = 3:4$  であるから

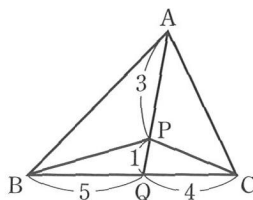
$$\triangle PCA = \frac{3}{4} \triangle ACQ = \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} S = \frac{1}{3} S \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また  $\triangle PAB = \triangle ABC - \triangle PBC - \triangle PCA$

$$= S - \frac{1}{4} S - \frac{1}{3} S = \frac{5}{12} S \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から

$$\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = \frac{1}{4} S : \frac{1}{3} S : \frac{5}{12} S = 3:4:5 \quad \square$$



8.  $\triangle ABC$  において、辺  $BC$  の中点を  $M$  とすると、次の等式が成り立つ。

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

このことを、ベクトルを用いて証明せよ。

指針 中線定理の証明  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$  において、 $AM^2$ ,  $BM^2$  を内積を利用して計算する。等式は パップスの(中線)定理 という。

解答  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$  とすると

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \quad \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } AM^2 &= |\overrightarrow{AM}|^2 = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= \left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}\right) = \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \\ BM^2 &= |\overrightarrow{BM}|^2 = \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BM} \\ &= \left(\frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}\right) = \frac{1}{4}(\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 2(AM^2 + BM^2) &= 2 \times \frac{1}{4} \{(\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})\} \\ &= \frac{1}{2} (|\vec{b}|^2 + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2) \\ &= |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = AB^2 + AC^2 \end{aligned}$$

すなわち  $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$  が成り立つ。  $\square$  終

9.  $\triangle OAB$  において、辺  $OB$  を  $2:1$  に内分する点を  $C$ 、線分  $AC$  の中点を  $M$  とし、直線  $OM$  と辺  $AB$  の交点を  $D$  とする。次のものを求めよ。

(1)  $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OM}$  となる実数  $k$  の値 (2)  $AD:DB$

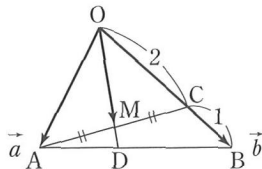
指針 2直線の交点

(1)  $D$  は直線  $AB$  上の点であるから、 $\overrightarrow{OD} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  と表したとき、 $s+t=1$  である。

(2) 内分点の公式を利用して比を求める。

解答 (1)  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \end{aligned}$$



$$\text{よって } \overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OM} = k\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{1}{2}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b}$$

$$D \text{ は直線 } AB \text{ 上の点であるから } \frac{1}{2}k + \frac{1}{3}k = 1$$

$$\text{これを解いて } k = \frac{6}{5} \quad \text{答}$$

$$(2) \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{5}\vec{a}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{6}{5}\vec{b}\right) = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{2+3}$$

$$\text{よって } AD : DB = 2 : 3 \quad \text{答}$$

教 p.48

10.  $\triangle OAB$  において、次の式を満たす点  $P$  の存在範囲を求めよ。

$$(1) \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + 2t\overrightarrow{OB}, \quad s+t=1, s \geq 0, t \geq 0$$

$$(2) \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq 3s + 2t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$$

指針 ベクトルの等式と点の存在範囲

$$(1) \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t(2\overrightarrow{OB}) \text{ とし, } 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'} \text{ とおく。}$$

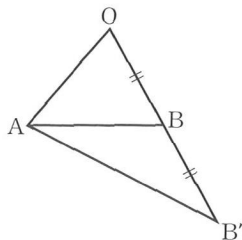
$$(2) 3s = s', 2t = t' \text{ とおくと } 0 \leq s' + t' \leq 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

解答 (1)  $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + 2t\overrightarrow{OB}$

$$= s\overrightarrow{OA} + t(2\overrightarrow{OB})$$

$$s+t=1, s \geq 0, t \geq 0$$

よって、 $2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$  とすると、点  $P$  の存在範囲は線分  $AB'$  である。答



$$(2) 3s = s', 2t = t' \text{ とおくと}$$

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

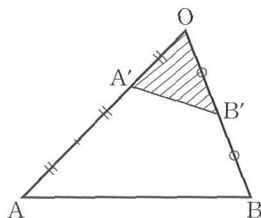
$$= 3s\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right) + 2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$= s'\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\right) + t'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

$$0 \leq s' + t' \leq 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

よって、 $\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$ ,  $\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$  とすると、点  $P$  の存在範囲は

$\triangle OA'B'$  の周および内部 である。答



## 研究

11. 点  $A(1, 2)$  から直線  $3x+4y-1=0$  に垂線を下ろし、交点を  $H$  とする。

(1)  $\vec{n}=(3, 4)$  に対し  $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$  となる実数  $k$  の値を求めよ。

(2) 点  $H$  の座標と線分  $AH$  の長さを求めよ。

指針 直線に下ろした垂線の交点の座標と線分の長さ 直線上にない1点から、直線に下ろした垂線と直線の交点の座標および垂線の長さを、直線の法線ベクトルを利用して求める問題である。

(1) 点  $H$  の座標を  $(x, y)$  とおいて、 $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$  から、 $x, y$  を  $k$  で表し、 $H$  が直線上にあることから、 $k$  の値を求める。

(2) (1)の結果を利用する。

解答 (1)  $\vec{n}=(3, 4)$  は直線  $3x+4y-1=0$  ……①  
の法線ベクトルの1つであるから、 $\overrightarrow{AH}$  と  $\vec{n}$   
は平行である。

よって、 $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$  となる実数  $k$  がある。

点  $H$  の座標を  $(x, y)$  とすると、  
 $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}$  から

$$(x-1, y-2)=k(3, 4)$$

よって

$$x=3k+1, y=4k+2 \quad \dots\dots ②$$

点  $H$  は直線①上にあるから、②を①に代入して

$$3(3k+1)+4(4k+2)-1=0$$

$$\text{よって} \quad 25k+10=0$$

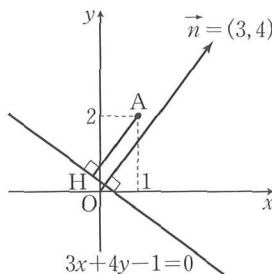
$$\text{これを解いて} \quad k=-\frac{2}{5} \quad \text{答}$$

(2) (1)において、 $k=-\frac{2}{5}$  を②に代入すると、点  $H$  の座標は

$$\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) \quad \text{答}$$

よって、線分  $AH$  の長さは

$$AH=\sqrt{\left(-\frac{1}{5}-1\right)^2+\left(\frac{2}{5}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{100}{25}}=2 \quad \text{答}$$



12. 平面上の異なる2点  $O, A$  に対して、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  とする。このとき、次のベクトル方程式において  $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$  となる点  $P$  の全体はどのような図形を表すか。

$$(1) (\vec{p} + \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0 \quad (2) |\vec{p} + \vec{a}| = |\vec{p} - \vec{a}|$$

**指針** ベクトル方程式の表す図形 (1)は左辺を展開, (2)は両辺を2乗。図形的に考えると,  $A'(-\vec{a})$ として,

(1)  $\overrightarrow{A'P} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$  より, 点  $P$  は線分  $A'A$  を直径とする円周上にある。

(2)  $|\overrightarrow{A'P}| = |\overrightarrow{AP}|$  より, 点  $P$  は2点  $A', A$  から等距離にある。

**解答** (1)  $(\vec{p} + \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$  から  $|\vec{p}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0$

よって,  $|\vec{p}|^2 = |\vec{a}|^2$  から  $|\vec{p}| = |\vec{a}|$

すなわち  $OP = OA$

したがって, ベクトル方程式は, 点  $O$  を中心とし, 線分  $OA$  を半径とする円を表す。□

$$(2) |\vec{p} + \vec{a}| = |\vec{p} - \vec{a}| \text{ から } |\vec{p} + \vec{a}|^2 = |\vec{p} - \vec{a}|^2$$

$$\text{よって } |\vec{p}|^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 = |\vec{p}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2$$

$$\text{ゆえに } \vec{p} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\vec{a} \neq \vec{0} \text{ であるから } \vec{p} = \vec{0} \text{ または } [\vec{p} \neq \vec{0}, \vec{p} \perp \vec{a}]$$

すなわち,  $P$  は  $O$  に一致するか, または  $OP \perp OA$

したがって, ベクトル方程式は 点  $O$  を通り直線  $OA$  に垂直な直線 を表す。

□